



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SECRETARIA DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL E TECNOLÓGICA
INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA DA BAHIA
CAMPUS EUNÁPOLIS**

BRUNO DOS SANTOS REIS

**MODELAGEM MATEMÁTICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:
UMA PROPOSTA DE ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS NO ENSINO SUPERIOR**

Eunápolis – BA
2022

BRUNO DOS SANTOS REIS

**MODELAGEM MATEMÁTICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:
UMA PROPOSTA DE ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS NO ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso Superior de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Eunápolis (IFBA), como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Me. Igor Breda Ferraço

Eunápolis – BA
2022

R375m Reis, Bruno dos Santos
 Modelagem matemática e equações diferenciais:
 uma proposta de ensino de equações diferenciais
 ordinárias no ensino superior / Bruno dos Santos
 Reis orientado por Igor Breda Ferraço. - - Euná-
 polis : IFBA, 2022.
 42 p.
 Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao
 curso de Licenciatura Plena em Matemática do Ins-
 tituto Federal da Bahia como requisito para ob-
 tenção do grau de Licenciado.
 1. Modelagem Matemática. 2. Metodologia de
 Ensino. 3. Equações Diferenciais Ordinárias. 4.
 Formação de Professores. I. Ferraço, Igor Breda,
 orient. II. Título. 510.7

Catálogo na fonte

Bibliotecária Responsável: Nilcéia Aparecida Conceição Santos Campos – CRB5 1378

**INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

FOLHA DE APROVAÇÃO

BRUNO DOS SANTOS REIS

**MODELAGEM MATEMÁTICA E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS:
UMA PROPOSTA DE ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS
NO ENSINO SUPERIOR**

Trabalho de conclusão de curso apresentado
como requisito parcial para obtenção do título
de Licenciatura em Matemática, pelo Instituto
Federal da Bahia Campus Eunápolis.

Aprovado em: 01 de junho de 2022.

Banca Examinadora

Me. Igor Breda Ferraço
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFBA

Dr. Fabíolo Moraes Amaral
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFBA

Me. Flaviana Paula Medeiros de Oliveira
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFBA

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele eu não teria a vida, a luta e a capacidade de chegar até aqui, por sempre zelar por mim, mesmo nos momentos em que eu já não suportava mais. Agradeço a mim mesmo, pois apenas Deus e eu sabemos das dificuldades encontradas durante todo este percurso. Agradeço a mim mesmo por nunca desistir, e por tentar sempre fazer mais coisas certas que erradas.

Agradeço a minha mãe, por ter criado três filhos sozinha e ainda sim conquistar tudo que sempre sonhou, se tornando um exemplo na minha vida de como quero ser, e conseguir sempre nos guiar pela estrada da vida, por me amar tanto que tirava do seu prato para pôr no meu.

Agradeço a toda minha família, em particular meus dois irmãos, Brendo Reis e Brenda Reis, por sempre estarem comigo quando preciso, por terem sido a pedra no meu sapato que eu precisava pra levantar e seguir meus sonhos, agradeço aos dois pelos momentos que vivemos juntos, e que ainda viveremos.

Agradeço aos meus amigos: André Ryuji, Ygor Augusto, Eliseu Reis, Higor Medrado, Melina Queiroz e Lucas Martins por todo o stress que passei com eles nos momentos mais críticos da minha vida, e soubemos nos conciliar e permanecer com a nossa amizade sempre firme e forte, e a Jafia Luz por nesse Trabalho sempre tentar me dar forças para continuar. São pessoas que levarei comigo durante toda a vida, pois sei que nosso vínculo será eterno.

Agradeço aos meus professores, cada um com sua particularidade, contribuindo para minha formação, em especial ao meu orientador Prof. Me. Igor Breda Ferreira, ex coordenador do curso de Licenciatura em Matemática, por ser quase sempre o exemplo de professor que quero ser, a ele devoto todo o meu apreço, por sugerir a ideia básica deste trabalho, por não desistir de mim, por solicitar ser o professor da matéria de equações diferenciais ordinárias com o intuito de me ajudar em minha pesquisa, e acima de tudo, por ser essa pessoa incrível, humilde e simpática sempre.

Finalmente, agradeço a todos que compõem o IFBA, *campus* Eunápolis, por desempenharem um excelente papel, mantendo a integralidade institucional e possibilitando a realização de sonhos.

"Se não arriscarmos, não criamos o futuro".
– Monkey D. Luffy

RESUMO

A Modelagem Matemática tornou-se uma das tendências metodológicas mais importantes da atualidade e pode ser potencializada por equações diferenciais ordinárias e suas aplicações. Neste contexto, este trabalho de conclusão de curso tem o propósito de trazer uma proposta de aulas utilizando a Modelagem Matemática e Equações Diferenciais Ordinárias para o Ensino Superior, mais precisamente no curso de Licenciatura em Matemática. O intuito maior dessa proposta é possibilitar uma ligação entre a Matemática da Sala de aula e o cotidiano dos alunos. É de grande importância salientar que a aplicação foi inserida num curso para formar docentes, logo, a utilização deste método de ensino gerará novas possibilidades de abordagens para os futuros licenciados. Deste modo, abordamos o Resfriamento de Newton numa situação em que os participantes deveriam descobrir a hora da morte de um ser vivo, e o Decaiemento Radioativo em que os colaboradores iriam datar a idade do tecido de uma bolsa. A coleta de dados para a avaliação da proposta foi feita através de um formulário do *google* e entregue aos participantes da pesquisa. Constatou-se que a metodologia de Modelagem foi renovadora, trouxe olhares críticos quanto a sociedade, assim como uma melhor aprendizagem das Equações Diferenciais Ordinárias.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Metodologia de Ensino. Equações Diferenciais Ordinárias. Formação de Professores.

ABSTRACT

Mathematical Modeling becomes a most important methodological trend of current and attractive applications. In this, this course conclusion work has the purpose of bringing a proposal of classes using a context of Mathematical Modeling and Ordinary Differential Equations for Higher Education, more precisely in the Mathematics Degree course. The main purpose of this proposal is to enable a connection between the Mathematics of the Classroom and the daily life of the students. It is very important to highlight that it will generate an application integrated in a course to train teachers, the use of this method of new possibilities of approaches for future graduates. In this way, we approach Newton's Cooling in a situation in which the participants of this discover the time of death of a living being, and Radioactive Decay in which the collaborators would date the age of the tissue of a bag. Data collection for the evaluation of the proposal was done through a google form and delivered to the research participants. It was found that the Modeling methodology was renewing, it brought critical views on society, as well as a better learning of Ordinary Differential Equations.

Key-words: Mathematical Modeling. Teaching Methodology. Ordinary Differential Equations. Teacher training.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	7
2 JUSTIFICATIVA	8
3 REFERENCIAL TEÓRICO	9
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	9
3.2 MATEMÁTICA APLICADA E MODELAGEM MATEMÁTICA.....	9
3.3 ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA.....	11
3.4 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD).....	15
3.4.1 Etapas das Situações Didáticas	16
3.5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS	17
3.5.1 Definição de uma Equação Diferencial Ordinária.....	17
3.5.2 Ordem e Grau de uma Equação Diferencial.....	18
3.5.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem	18
3.5.3.1 Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis	19
3.6 MODELOS MATEMÁTICOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM	19
3.6.1 Lei do Resfriamento de Newton	20
3.6.2 Lei do Decaimento Radioativo	21
4 METODOLOGIA.....	22
4.1 PRIMEIRA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA	23
4.2 APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA (MINICURSO).....	23
5.RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	24
5.1 RESULTADOS DA PRIMEIRA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA.....	24
5.2 RESULTADOS DO MINICURSO: QUEM MATOU IGOR BREDAS?	25
5.3 RESULTADOS DO MINICURSO: DESCUBRA SE ESTOU BLEFANDO OU NÃO.....	31
5.4 RESULTADOS DA SEGUNDA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA.....	34

REFERÊNCIAS38

1 INTRODUÇÃO

Quando se diz respeito ao processo de ensino e aprendizagem da matemática, diversos professores ao redor do mundo buscam aperfeiçoar e desenvolver novas estratégias para que os alunos conciliem sua realidade a matemática. Alguns exemplos claros disso são: a gamificação¹, modelos concretos, e é claro, a modelagem matemática;

A modelagem matemática é definida por Bassanezi (2002) como um processo dinâmico utilizado para obtenção e validação de modelos matemáticos, sendo uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. Já para Borssoi (2004) ela é estabelecida como estratégia de ensino e aprendizagem, pode ser compreendida como uma abordagem, por meio da Matemática, de uma situação-problema da realidade, que configura uma atividade que se desenvolve segundo um conjunto de procedimentos e na qual a escolha do problema a ser investigado tem a participação direta dos sujeitos envolvidos.

Por conta de suas aplicações, como o resfriamento de Newton e decaimento radioativo, as equações diferenciais podem potencializar o uso da modelagem. Historicamente, o estudo das equações diferenciais acompanhou o desenvolvimento da física, atuando como ferramenta para calcular as equações de movimento da mecânica newtoniana, as equações ondulatórias da física, ondas e eletromagnetismo e, posteriormente, na formulação da mecânica quântica e da relatividade. Hoje, o uso de equações diferenciais se espalhou para as mais diversas áreas do conhecimento.

A construção de modelos em conjunto com as equações diferenciais, nos trazem resultados aproximados de um problema, podendo ser validados sempre que necessário. Algumas áreas em que podemos construir modelos são: engenharias, física, biologia, química e até mesmo economia.

Assim, este trabalho visa responder o seguinte questionamento: Quais são as contribuições e limitações da modelagem matemática no processo de ensino e de aprendizagem de equações diferenciais ordinárias, especificamente no curso superior de Licenciatura em Matemática?

¹ Gamificação: A gamificação é a aplicação das estratégias dos jogos nas atividades do dia a dia, com o objetivo de aumentar o engajamento dos participantes. Ela se baseia no *game thinking*, conceito que abrange a integração da gamificação com outros saberes.

2 JUSTIFICATIVA

A aprendizagem significativa subjaz à integração construtiva entre pensamento, sentimento e ação que conduz ao engrandecimento humano (Novak, 1988). Nesse sentido, o uso de situações problema desde o início da aprendizagem do aluno fazem com que ele integre e compreenda cada vez mais os conceitos matemáticos que estão enraizados nas diversas áreas da ciência.

Para Ausubel (1980), Carreira (1993) e D'Ambrosio (2002), a aprendizagem pode ser mais ou menos significativa, dependendo das estratégias adotadas pelo aluno. Esta afirmação vai de encontro a ideia de Borsoi quando ela diz que:

[...] situações de ensino que proporcionam ao aluno o contato com um contexto real podem motivar o desenvolvimento de estratégias que levam à aquisição do conhecimento de forma significativa. Em um processo de modelagem, esse aspecto pode ser evidenciado em diferentes momentos e com maior expressão nas etapas que envolvem definição das hipóteses e aproximações simplificadoras e na elaboração e resolução do problema matemático (BORSOI, 2004).

Com isso, Este trabalho tem como proposta, mostrar a importância da modelagem matemática na formação de professores de licenciatura em matemática, buscando através de um minicurso, alcançar os seguintes objetivos:

- Expor contribuições e limitações no uso da modelagem matemática;
- Promover e instigar a Modelagem Matemática Crítica como ápice no processo de ensino e aprendizagem.
- Compreender como os alunos de Licenciatura em Matemática estabelecem as discussões críticas diante dos modelos produzidos que envolveram equações diferenciais;
- Descrever estratégias com o uso de Modelagem Matemática e descrever como estas são aprimoradas com o uso de Equações Diferenciais Ordinárias;

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Segundo Bassanezi (2002), a matemática considerada pura segue a tendência formalista, a qual consiste somente de axiomas, definições e teoremas encaixados e estruturados de maneira consistente, num crescente caudal de generalizações. Esta doutrina purista entrou de forma gradual no que diz respeito a educação matemática, se mantendo sempre distante de suas aplicabilidades.

É natural pensar, a partir do que foi abordado, que não existe harmonia entre a matemática e outras áreas do conhecimento, o que seria equivocado, pois, talvez por conta de seu alto potencial de sintetizar e generalizar, modelos matemáticos tem penetrado vigorosamente em áreas como: Biologia, Química, Física, entre outras. Até mesmo áreas como história e música se puseram a procurar possibilidades de modelar suas teorias através de conceitos matemáticos.

Indo de encontro ao q foi explicitado, D'Ambrosio (1986) afirma que a origem das ideias matemáticas é resultado de um processo que procura explicar e entender fatos e fenômenos observados na realidade. O desenvolvimento dessas ideias e sua organização intelectual dão-se a partir de elaborações sobre representações da realidade. Tais representações constituem o que se costuma chamar de “modelos matemáticos”, cuja obtenção, aplicação e avaliação compõem a modelagem matemática.

3.2 MATEMÁTICA APLICADA E MODELAGEM MATEMÁTICA

A matemática aplicada é essencialmente interdisciplinar, e sua atividade consiste em criar uma estrutura matemática aplicável fora de seu campo. A modelagem, por sua vez, é uma ferramenta indispensável da matemática aplicada. Nesse contexto, a construção matemática pode ser entendida como uma atividade que busca sintetizar ideias formadas a partir de situações experimentais que quase sempre estão escondidas em um emaranhado de variáveis. Fazer matemática, nessa visão, é uma mistura

equilibrada de abstração e formalização, sem perder de vista a fonte original do processo.

Conforme Biembengut e Hein (2005), a matemática e a realidade são dois conjuntos disjuntos e a modelagem é um meio de fazê-los interagir. Os autores referem-se à Modelagem Matemática como um processo que traduz, de forma aproximada, o fenômeno observado no mundo real para o mundo matemático. Usada como metodologia de ensino e aprendizagem, “parte de uma situação/tema e sobre ela desenvolve questões, que tentarão ser respondidas mediante o uso de ferramental matemático e da pesquisa sobre o tema” (BIEMBENGUT; HEIN, 2005, p.28).

Quando se comparado ao método tradicional de ensino matemático, em que o conteúdo é aplicado e só então são abordadas situações problema que na maioria das vezes serão respondidas por simples repetição, a Modelagem Matemática nos dá a possibilidade de pensar na própria realidade como um modelo, isto é, analisar a matemática de uma forma totalmente diferente e muito mais eficaz.

Silveira e Ribas (2004), nos trazem justificativas do uso da Modelagem Matemática, sendo algumas delas:

- Motivação dos alunos e do próprio professor;
- Facilitação da aprendizagem. O conteúdo matemático passa a ter mais significado, deixa de ser abstrato e passa a ser concreto;
- Preparação para a profissão;
- Desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo em geral;
- Desenvolvimento do aluno como cidadão crítico e transformador de sua realidade;
- Compreensão do papel sócio-cultural da matemática, tornando-a assim, mais importante.

A Modelagem Matemática está diretamente ligada a situações-problema, e as situações problema são um pontapé inicial para um ótimo aprendizado. “As situações-problema abordadas pelos alunos nas atividades de modelagem, constituem, de modo geral, um material potencialmente significativo e podem desencadear a predisposição para aprender”. (ALMEIDA; BORSOI, 2004). Além disso, para Tavares:

[...] se o aluno não teve a oportunidade, durante a sua vida acadêmica, de participar ativamente da elaboração e resolução de problemas, coletando dados, sugerindo hipóteses, encontrando a solução, este, provavelmente terá dificuldades para lidar com situações problemáticas de sua atividade profissional (TAVARES, 1996, p.36).

A forma como a matemática aplicada, especialmente pela modelagem matemática, aproxima-se da concepção de Platão sobre a construção do conhecimento, quando este diz que a matemática antes de mais nada, é a chave para a compreensão do universo, porque é como se o modelo estivesse ali, em algum lugar da Matemática. Portanto, deve-se antecipar aqui uma discussão do ponto de vista pedagógico: o desafio para os professores, que tomam o caminho da modelagem como método de ensino, é ajudar os alunos a compreender, construindo boas harmonias e relações matemáticas, passo a passo.

3.3 ETAPAS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

De acordo com Biembengut e Hein (2005) e Miguel (2009), o processo da Modelagem Matemática divide-se em três etapas, subdivididas em seis sub-etapas, como segue:

1ª etapa. Interação com o assunto:

- a) reconhecimento da situação problema e
- b) familiarização com o assunto a ser modelo-pesquisa.

Nesta etapa, a situação a ser estudada será delineada e para torná-la mais clara deverá ser feita uma pesquisa sobre o assunto escolhido por meio de livros, revistas especializadas, internet, entrevistas e de dados obtidos junto a especialistas da área.

2ª etapa. Matematização:

- a) formulação do problema – hipótese e
- b) resolução do problema em termos do modelo.

Esta é a fase mais complexa e desafiadora, pois é nela que se dará a tradução da situação-problema para a linguagem matemática. Nela, intuição, criatividade e experiência acumulada são elementos indispensáveis. Para formular e validar as hipóteses é necessário:

- classificar as informações relevantes e não relevantes, identificando os fatos envolvidos;
- decidir quais os fatores devem ser perseguidos, levantando hipóteses;
- selecionar variações relevantes e constantes envolvidas;
- selecionar símbolos apropriados para essas variações e
- descrever essas relações em termos matemáticos.

Para chegar ao Modelo Matemático são efetuadas várias deduções. Ao final desta etapa, deve-se obter um conjunto de expressões e fórmulas, ou equações algébricas, ou gráficas, ou representações, ou programa computacional que levem a solução ou permitam a dedução de uma solução. Desta forma, o problema passa a ser resolvido com o ferramental matemático que se dispõe. Isto requererá uns 8 conhecimentos razoável sobre as entidades matemáticas envolvidas na formulação do modelo.

3ª etapa. Modelo Matemático:

- a) interpretação da solução e
- b) validação do modelo-avaliação.

Para a conclusão e utilização do modelo será necessária uma checagem para verificar em que nível este se aproxima da situação-problema apresentada. Assim, a

interpretação do modelo deve ser feita por meio de análise das implicações da solução, derivada do modelo que está sendo investigado, para então, verificar se está adequado, retornando à situação-problema investigada. Para finalizar, é necessário verificar até que ponto o modelo encontrado satisfaz a situação problematizada. Caso o modelo não atenda às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado a partir da segunda etapa, reorganizando-a.

Falando didaticamente, em nossas pesquisas, segundo o quadro 1 notamos que Barbosa (2004) afirma que existem três maneiras de se aplicar a modelagem matemática, delimitando elas entre casos.

Tabela 1 – Tarefas no processo de modelagem matemática

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulação do Problema	Professor	Professor	Professor/aluno
Simplificação	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Coleta de Dados	Professor	Professor/aluno	Professor/aluno
Solução	Professor/aluno	Professor/aluno	Professor/aluno

Fonte: Barbosa (2004, p. 77).

Em relação ao Caso 1, Barbosa relata que:

[...] o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação. Aqui, os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados e a atividade não é muito extensa. Citarei um exemplo extraído de minha própria sala de aula no qual solicitei aos alunos para investigar sobre os planos de pagamento disponíveis no mercado para ter o acesso à internet. Coletei os preços de uma companhia que oferece o serviço de internet. [...]. Esta investigação toma pouco tempo, cerca de três aulas, incluindo a discussão dos resultados”(BARBOSA, 2004, p.76).

Nesse caso, o professor estará encarregado de quase todo o processo, deixando o aluno responsável pela solução do problema.

Já em relação ao Caso 2, ele nos diz que “os alunos se deparam apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao

professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial” Barbosa (2004). Para um esclarecimento maior, Barbosa nos dá o seguinte exemplo:

[...]em outra turma, apresentei a seguinte questão: “Quanto custa ter acesso à internet?” Discuti com os estudantes os problemas, porém não dei nenhuma tabela de preços e os vários grupos ficaram responsáveis para a coleta daqueles que julgavam necessários para resolver o problema. Eles tiveram que selecionar as variáveis importantes e traçar estratégias de resolução. Essa atividade demandou mais tempo que a anterior, consumindo algumas semanas. Durante esse tempo, os alunos trabalharam fora da sala de aula e discutiram comigo em sala o desenvolvimento da tarefa. O projeto foi concluído com uma apresentação oral por todos os grupos, e subsequente discussão. Nesse caso, o professor teve menos controle sobre as atividades dos alunos e esses tiveram uma maior oportunidade de experimentar todas as fases do processo de Modelagem (BARBOSA, 2004, p. 76).

Por fim, Barbosa nos afirma que o Caso 3 “trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos” (Barbosa, 2004, p. 77). Para exemplificar, o autor esclarece da seguinte forma:

Os alunos foram convidados a escolherem temas de interesse. Telecomunicações, fome, inflação, marketing e a taxa de contribuição social foram citados pelos 5 grupos de estudantes. Focarei minha discussão sobre o grupo que escolheu o último tema: a taxa de contribuição social. Os estudantes iniciaram levantando questões sobre os tópicos. No início, eles não possuíam uma ideia clara sobre como proceder. À medida que se tornavam mais familiares com o tema e as variáveis, e após discussões com os professores, eles escolheram uma questão singular para perseguir: Qual é o impacto da contribuição social sobre os salários? Daí eles tiveram que coletar e organizar dados antes que pudessem resolver o problema. Nesse caso, a atividade de Modelagem tomou considerável tempo em relação aos casos anteriores, em particular pela dificuldade inicial dos alunos em formular os problemas. Como no caso prévio, o professor acompanhou o trabalho dos alunos nas salas, mas tiveram que desenvolver a maior parte em tempo extra (BARBOSA, 2004, p. 77).

O caso 3 expande a aprendizagem matemática para fora do seu contexto em si, ou seja, aborda diferentes áreas do conhecimento. Nessa abordagem, os alunos são responsáveis por todo o seu processo de aprendizagem, escolhem os temas, formulam as situações problema, a analisam, fazem a coleta de dados, e por fim, procuram sua solução. É importante ressaltar que a escolha do tema pode ser oferecida também pelo docente.

Enquanto o caso 1 demanda pouco tempo para sua realização, os casos 2 e 3 requerem uma quantidade maior de esforço por ambas as partes, podendo ser prolongada por diversas vezes. Porém, todos os casos são importantes para o processo de uma aprendizagem significativa, o professor deverá estar atento quanto a quais casos utilizar durante a aplicação de um novo conteúdo matemático.

3.4 TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS (TSD)

Para ter um bom embasamento teórico quanto a aplicação da Modelagem, decidimos nos aprofundar na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau que se encaixa perfeitamente com a nossa proposta didática. Para Brousseau (1986), a didática da matemática estuda atividades didáticas que têm como objetivo o ensino da parte específica dos saberes matemáticos, propiciando explicações, conceitos e teorias, assim como meios de previsão e análise; incorporando resultados relativos aos comportamentos cognitivos dos alunos, além dos tipos de situações utilizadas e os fenômenos de comunicação do saber.

A partir dessa ideia, Guy Brousseau (1986) desenvolveu na França a Teoria das Situações Didáticas. Uma teoria que engloba algumas situações imprescindíveis dentro do terreno da didática a partir de um modelo Teórico; É um campo de reflexões para fazer progredir o ensino dessa disciplina nas classes do ensino básico, onde o professor, com a fundamentação dessa teoria, orienta o aprendiz para que possa desenvolver atividades que lhe permitam apropriar-se de novos saberes.

Em sua teoria, docentes e discentes são atores indispensáveis da relação de ensino e aprendizagem, bem como o meio (*milieu*) em que a situação didática se faz presente, segundo Teixeira (2013). É claro que não podemos ter como restritiva a ação do professor quanto as suas atividades, o fazendo ter apenas o papel de comunicador de um saber, mas sim um mediador. O mediador deverá manifestar um problema, capaz de ablaquear no aluno à busca de um novo conhecimento, de ver a verdade na realidade.

Existirão assim, variáveis que o professor não terá um controle direto, quando expor esses problemas aos alunos, e este conjunto de variáveis foi chamado por Brousseau de situações adidáticas. Portanto, para Brousseau (1986), a situação adidática

é representada pelo esforço independente do aluno, em certos momentos de aprendizagem. Quando o aprendiz tem dificuldades na resolução de uma situação adidática, o professor deve expressar intenção de orientá-lo no encaminhamento da resolução, caracterizando, assim, uma situação didática. Portanto, toda situação adidática pode tornar-se um tipo de situação didática.

3.4.1 Etapas das Situações Didáticas

Os conceitos mais importantes para essa teoria ter sido escolhida como base para o cumprimento dos objetivos, se deu por suas tipologias se manifestarem de maneira estritamente positiva na aplicação da Modelagem dentro de sala de aula. De acordo com Brousseau (1986) as principais atividades específicas da aprendizagem da matemática são:

- situação didática de devolução: ato pelo qual o professor cede ao aluno uma parte da responsabilidade pela aprendizagem, incluindo-o no jogo e assumindo os riscos por tal ato;
- situação didática de ação: o aluno reflete e simula tentativas, ao eleger um procedimento de resolução dentro de um esquema de adaptação, por intermédio da interação com o *milieu*, tomando as decisões que faltam para organizar a resolução do problema;
- situação didática de formulação: ocorre troca de informação entre o aluno e o *milieu*, com a utilização de uma linguagem mais adequada, sem a obrigatoriedade do uso explícito de linguagem matemática formal, podendo ocorrer ambiguidade, redundância, uso de metáforas, criação de termos semiológicos novos, falta de pertinência e de eficácia na mensagem, dentro de retroações contínuas; os alunos procuram modificar a linguagem que utilizam habitualmente, adequando-a às informações que devem comunicar;
- situação didática de validação: os alunos tentam convencer os interlocutores da veracidade das afirmações, utilizando uma linguagem matemática apropriada (demonstrações); as situações de devolução, ação, formulação e validação caracterizam a situação adidática, em que o professor permite ao aluno trilhar os caminhos da descoberta, sem revelar sua intenção didática, tendo somente o papel de mediador.

Estas quatro situações têm uma componente psicológica favorável, pois ao envolverem o aluno no seu processo de aprendizagem pretendem que ele seja coautor, elevando sua autonomia no desenvolvimento de novos saberes.

Por fim, ocorre a quinta situação – a institucionalização – onde o professor, retoma a parte da responsabilidade cedida aos alunos, conferindo-lhes o estatuto de saber ou descartando algumas produções dos alunos e definindo, assim, os objetos de estudo por meio da formalização e da generalização. É na institucionalização que o papel explícito do professor é manifestado: o objeto é claramente oferecido ao aluno. Há, portanto, uma real aprendizagem, reconhecida pelo professor. Brousseau (2008, p. 21) pondera que o papel da institucionalização é “prover sentido de um saber”.

3.5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Para que tenhamos uma boa base sobre o objeto matemático que utilizaremos como principal alvo para o uso da modelagem, fez-se necessário e suficiente nos aprofundarmos sobre as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. Sendo assim, a seguir serão abordados conceitos, técnicas e definições de equações diferenciais ordinárias.

3.5.1 Definição de uma Equação Diferencial Ordinária

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) é uma equação da forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), y^{(n)}(x)) = 0$$

Envolvendo uma função incógnita $y = y(x)$ e suas derivadas ou suas diferenciais. x é a variável independente, y é a variável dependente e o símbolo $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função $y = y(x)$. Por exemplo: $y'' + 3y' + 6y = \sin(x)$ e $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$

3.5.2 Ordem e Grau de uma Equação Diferencial

A ordem da equação diferencial é a ordem da mais alta derivada da função incógnita que ocorre na equação. Grau é o valor do expoente para a derivada mais alta da equação, quando a equação tem a “forma” de um polinômio na função incógnita e em suas derivadas, como por exemplo:

$$A y^{(4)} + B y^{(3)} + C y^{(2)} + D y^{(1)} = 0.$$

Exemplos:

1. $y'' + 3y' + 6y = \sin(x)$ e $y'' + 3yy' = e^{(x)}$ tem ordem 2 e grau 1
2. $y' = f(x, y)$ e $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ tem ordem 1 e grau 1

3.5.3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Uma grande quantidade de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pode ser escrita na sua forma normal, dada por:

$$y' = f(x, y)$$

ou quando a função $f = f(x, y)$ pode ser escrita como o quociente de duas outras funções $M = M(x, y)$ e $N = N(x, y)$, temos:

$$y' = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}; N \neq 0$$

É vantajoso manter o sinal negativo antes da fração, na forma:

$$y' = - \frac{M(x, y)}{N(x, y)}; N \neq 0$$

pois usando o fato que $dy = y'(x)dx$, poderemos escrever $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.

Exemplos:

1. A equação diferencial $y' = \cos(x + y)$ está em sua forma normal.
2. A equação diferencial $y' = \frac{x}{y}$ está em sua forma normal, mas pode ser reescrita na sua forma diferencial $x dx - y dy = 0$.

3.5.3.1 Equações Diferenciais de Variáveis Separáveis

Seja uma equação diferencial $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$. Se M é uma função apenas da variável x , isto é $M = M(x)$ e N é uma função apenas da variável y , isto é $N = N(y)$, então a equação dada fica na forma $M(x) dx + N(y) dy = 0$ e ela é chamada equação separável. Isto é motivado pelo fato que é possível separar as funções de modo que cada membro da igualdade possua uma função com apenas uma variável. Desse modo, podemos realizar a integração de cada membro por um processo “simples”.

Exemplo: A equação diferencial $y' = \frac{x}{y}$ na sua forma normal, pode ser reescrita na sua forma diferencial $x dx - y dy = 0$ ou ainda na forma

$$x dx = y dy$$

Integrando cada termo independentemente, teremos:

$\frac{x^2}{2} + C1 = \frac{y^2}{2} + C2$ e reunindo as constantes em uma constante C , teremos:

$$x^2 - y^2 = C$$

e esta relação satisfaz à equação diferencial dada.

3.6 MODELOS MATEMÁTICOS E EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE PRIMEIRA ORDEM

Segundo Sodré (2013) Diversas Situações Práticas, podem ser devidamente modelados pela Matemática, de acordo com as etapas abaixo (não muito bem definidas):

1. Construção de um modelo para descrever algum fenômeno físico;
2. Estabelecimento de um procedimento matemático adequado ao modelo físico;
3. Realização de cálculos numéricos aproximados com o uso do Modelo Matemático pré-estabelecido;
4. Comparação das quantidades numéricas obtidas através do Modelo Matemático com aquelas que se esperava obter a partir da formulação do modelo criado para resolver o problema.

Após estas etapas, costuma-se analisar os resultados e na verificação da adequação dos mesmos, aceita-se o modelo e na inadequação dos resultados, reformula-se o modelo, geralmente introduzindo maiores controles sobre as variáveis importantes, retirando-se os controles sobre as variáveis que não mostraram importância.

3.6.1 Lei do Resfriamento de Newton

Quando se é investigado o falecimento de um ser humano, ou até mesmo de um animal, dependendo das circunstâncias, é importante estimar o instante da morte, seja para a nota de falecimento, ou para a descoberta de um possível suspeito, caso o falecimento seja por homicídio.

Para mostrar uma aplicação de Equações Diferenciais ligada a este tipo de problema e como parte do processo metodológico, foi necessário a criação de um modelo através da Lei do Resfriamento de Newton. Ela nos diz que Quando se expõe um corpo de temperatura T_c a um ambiente de temperatura T_a , de forma que $T_c \neq T_a$, nota-se que, após algum tempo, o objeto atinge o equilíbrio térmico com o ambiente. Comparando os resultados de diferentes situações envolvendo resfriamento de um corpo podemos constatar que a taxa de resfriamento depende de fatores, tais como:

- A diferença de temperatura entre o corpo e o meio externo;
- A superfície do corpo exposta;
- O calor específico da substância que o constitui;
- As condições do ambiente no qual este corpo foi colocado;
- O tempo em que o objeto permanece em contato com o ambiente.

Pode-se representar isto através de uma equação:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_a)$$

Onde:

$dT \Rightarrow$ variação de temperatura sofrida pelo corpo;

$K \Rightarrow$ representa um coeficiente de proporcionalidade, que dependerá da superfície exposta, do calor específico do corpo e também é função de características do meio ambiente;

$T_c \Rightarrow$ temperatura inicial do corpo;

$T_a \Rightarrow$ temperatura ambiente;

$dt \Rightarrow$ intervalo de tempo.

Podemos verificar através de resultados experimentais, ou através da análise da equação acima, que a rapidez de resfriamento será tanto maior quanto maior for a diferença entre T_c e T_a . Já a contribuição do coeficiente K depende de diversos fatores, tais como:

- Superfície exposta: pode-se verificar que quanto maior for a superfície de contato entre o corpo e o meio externo (ambiente) maior será a rapidez de resfriamento/aquecimento;
- Características do meio: assim como as características do corpo são importantes neste processo, as características do meio em que este está imerso, também o são. Por exemplo, se o objeto está em contato com o ar, que é um bom isolante térmico, mais lentos serão os processos de resfriamento ou aquecimento do que se estiver imerso em água. A condutividade térmica da água é maior que a do ar. Uma outra característica importante é a mobilidade do meio externo em relação ao objeto, quanto maior for esta mobilidade, mais rápidas se darão as trocas térmicas entre o objeto e o meio em contato com o mesmo (um exemplo claro é quando queremos resfriar mais rápido um cafezinho, sopraremos ele).

3.6.2 Lei do Decaimento Radioativo

A Lei de Decaimento Radioativo se baseia no fato de que certos materiais radioativos se desintegram (ou decaem) a uma taxa de variação proporcional à quantidade presente no material, isto é, o número de átomos que se decompõem por unidade de tempo numa massa de átomos instáveis depende do total dos átomos existentes.

Pode-se estimar a probabilidade de decaimento por unidade de tempo de um elemento, que recebe o nome de taxa de decaimento. O número de desintegrações por unidade é chamado de atividade, sendo definida como a razão de decaimento, expressa por:

$$\frac{dm}{dt} = km(t)$$

Onde:

$\frac{dm}{dt} \Rightarrow$ decaimento radioativo em relação ao tempo;

$K \Rightarrow$ é a chamada constante de decaimento, que varia para cada isótopo e caracteriza a fração de núcleos que decaem na unidade de tempo, isto é, determina a taxa de decaimento.

Quando não conhecemos o material radioativo, devemos determinar o valor da constante de decaimento K , o que pode ser feito através da característica de “meia-vida” do material (que pode ser determinada através de análises em laboratórios químicos). “Meia-vida” é o tempo necessário para desintegrar a metade do material.

4 METODOLOGIA

Decidimos que para alcançar os nossos objetivos, deveríamos fazer uma revisão completa da ementa da disciplina de E.D.O do curso de Licenciatura em Matemática, para podermos escolher um processo metodológico que fosse suficientemente eficiente e importante. Sabe-se que a disciplina tem duração de 60 horas ao longo do semestre e que foram necessários conhecimentos matemáticos prévios tais como: cálculos de função, Integrais e derivadas.

Após a revisão da ementa, optou-se por utilizar os processos de Modelagem em situações que envolvessem equações diferenciais de variáveis separadas, foram escolhidos para este processo: Resfriamento de Newton e Decaimento Radioativo.

4.1 PRIMEIRA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Tendo escolhido os conteúdos que criaríamos modelos matemáticos, foi desenvolvido uma avaliação diagnóstica qualitativa com o objetivo de coletar dados sobre a familiaridade dos participantes da pesquisa com a Modelagem, além de obter informações sobre os conhecimentos prévios necessários para a aplicação dessa metodologia. Esta avaliação ocorreu antes das aulas de E.D.O.

De acordo com Gil (1999, p. 128), a avaliação diagnóstica é uma “técnica de investigação composta por um número mais ou menos elevado de questões apresentadas por escrito às pessoas, tendo por objetivo o conhecimento de opiniões, crenças, sentimentos, interesses, expectativas, situações vivenciadas, etc.”.

4.2 APLICAÇÃO DA MODELAGEM MATEMÁTICA (MINICURSO)

Após a coleta de dados envolvendo a avaliação diagnóstica, o próximo passo do processo metodológico foi a aplicação da modelagem através de um minicurso, para isso, como foi dito anteriormente, nos apropriaremos das definições de equações diferenciais de variáveis separáveis, resfriamento de Newton e decaimento radioativo.

Como primeira etapa, fizemos uma simulação de uma cena de crime dentro da sala de aula. Sabe-se que uma cena de crime é qualquer local que talvez esteja associado a um crime cometido. Cenas de crimes contêm evidências físicas pertinentes para uma investigação criminal. Assim a sala de aula teve um formato de cena de crime, contendo um esboço de cadáver feito com fita e anotações feitas por peritos.

As anotações dos peritos vieram com dados importantes para a criação de um modelo matemático que envolve-se a hora em que a vítima foi assassinada. Desse modo, a turma foi dividida em dois grupos, ambos os grupos com uma cópia das anotações, e tiveram como objetivo o desenvolvimento desse modelo para descobrir quem foi de fato o assassino.

Após a criação desses modelos, ocorreu a fase de validação, onde comparamos os modelos com a realidade, chegando assim, caso o modelo fosse valido, ao fim do caso. Em seguida, retomamos a aula e conceitualizamos todas as técnicas utilizadas para o desenvolvimento dos modelos. Desse modo, os participantes fariam as devidas correções em seus protótipos, encerrando a primeira etapa.

Para a segunda etapa da aula, fizemos uma simulação de um leilão de venda de uma bolsa. Foi dado um valor relativamente alto aos alunos com a justificativa de que o tecido da bolsa era datado na mesma época que Jesus Cristo viveu, contendo, no dia do minicurso cerca de 92% e 93% de Carbono-14 original. Os dois grupos dessa vez, tiveram o objetivo de construir um modelo (através da fórmula de decaimento radioativo) que se calcula a idade do pano, comprovando ou não a veracidade da informação.

Para obtermos dados sobre a aprendizagem dos participantes da pesquisa, foi desenvolvido um diário de bordo, onde anotamos todas as informações que julgamos relevantes durante todo o processo de modelagem. Além disso, decidimos que uma avaliação diagnóstica qualitativa para os alunos posterior a aula fosse desenvolvida, abrindo para eles exporem suas opiniões sobre a aplicação, assim como o impacto na aprendizagem do conteúdo de equações diferenciais e como ela se relaciona com a realidade.

5.RESULTADOS E DISCUSSÕES

A Priori foi constatado um total de 9 alunos matriculados na disciplina de equações diferenciais, contudo durante o decorrer da disciplina um dos alunos solicitou o trancamento da disciplina, totalizando, no momento da aplicação dos questionários e do minicurso, 8 participantes. Trataremos os resultados por ordem cronológica, iniciando com a primeira avaliação diagnóstica, minicurso, e por fim, a segunda avaliação diagnóstica.

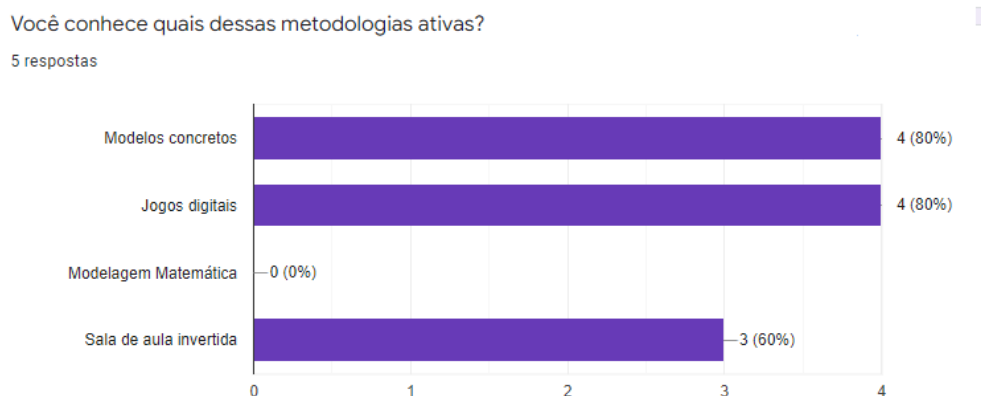
5.1 RESULTADOS DA PRIMEIRA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

O objetivo da primeira avaliação diagnóstica, como dito anteriormente, era de sondar os conhecimentos dos participantes quanto aos objetos matemáticos e sua familiaridade quanto a metodologias ativas. Dos oito colaboradores, cinco responderam a primeira avaliação.

A princípio, conforme a figura 1, os participantes foram indagados quanto ao seu conhecimento sobre as metodologias ativas. A partir das respostas, foi possível

notar uma grande noção de jogos digitais e modelos concretos, o q nos permite afirmar que os participantes têm uma boa proximidade com novas metodologias.

Gráfico 1 - Questão da avaliação diagnóstica



Fonte: <https://docs.google.com>

Uma das pautas neste feedback, é a falta de proximidade dos participantes quanto modelagem matemática, o que nos leva a segunda pergunta: o que os participantes sabem sobre a modelagem matemática? Será que ele tem o interesse em vivenciar? De acordo com a avaliação diagnóstica, a resposta para a segunda pergunta é sim. O colaborador A, afirma que não tem muito conhecimento nesse objeto, mas tenho interesse em conhecer mais sobre. Já o participante B, nos diz que já viu algumas explicações sobre essa metodologia, porém nada preciso e com certeza tem interesse em vivenciar, afinal é mais uma possibilidade que ele pode agregar a sua formação docente.

Quanto aos conhecimentos prévios, todos os colaboradores afirmaram ter um bom aprendizado dos conteúdos que envolvem derivação e integração. Isso nos permitiu organizar as aulas sem nos prendermos tanto a explicitação de saberes que seriam pré-requisitos. Como o minicurso foi aplicado no meio do semestre letivo, os participantes já teriam o conhecimento atual necessário para o desenvolvimento dos modelos matemáticos.

5.2 RESULTADOS DO MINICURSO: QUEM MATOU IGOR BREDAS?

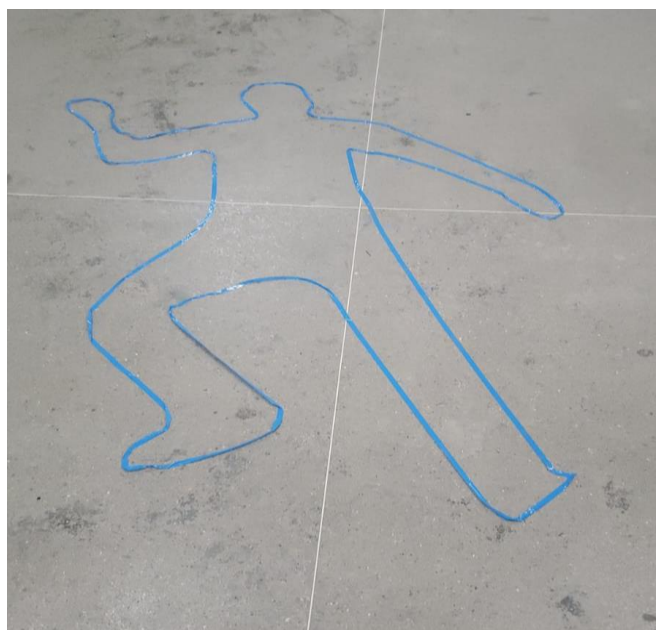
Devemos explicitar nesse momento a nossa satisfação quanto aos resultados

da aplicação do minicurso, desde o processo de criação dos modelos até o feedback posterior dos alunos na segunda avaliação diagnóstica foi possível notar a satisfação dos colaboradores quanto à sua aprendizagem. O minicurso ocorreu num sábado, pela manhã, e todos os matriculados na disciplina compareceram, ou seja, oito participantes.

Para o primeiro momento, em que os 8 integrantes construiriam um modelo que pudesse expor a hora da morte de um ser vivo em determinada situação, a sala de aula foi transformada e uma cena de crime, como pode ser vista a partir das figuras 1 e 2. Além disso, para trazer mais realismo a situação, decidimos que a vítima de assassinato fosse o próprio professor de equações diferenciais, e os suspeitos, os participantes deste trabalho de conclusão.

Todas essas propostas foram escolhidas para atingir o *milieu* ideal, ou seja, foi planejado e organizado para que a aprendizagem ocorra em uma interação baseada em desequilíbrios, assimilações e acomodações, na dosagem correta BROUSSEAU (1996). Notou-se, após a chegada de cada um dos participantes, a curiosidade perante a situação, afirmaram estar muito instigados antes mesmo da explicitação das tarefas.

Figura 1 - Cena de Crime



Fonte: Dados da pesquisa

Figura 2 - Anotações



Fonte: Dados da Pesquisa

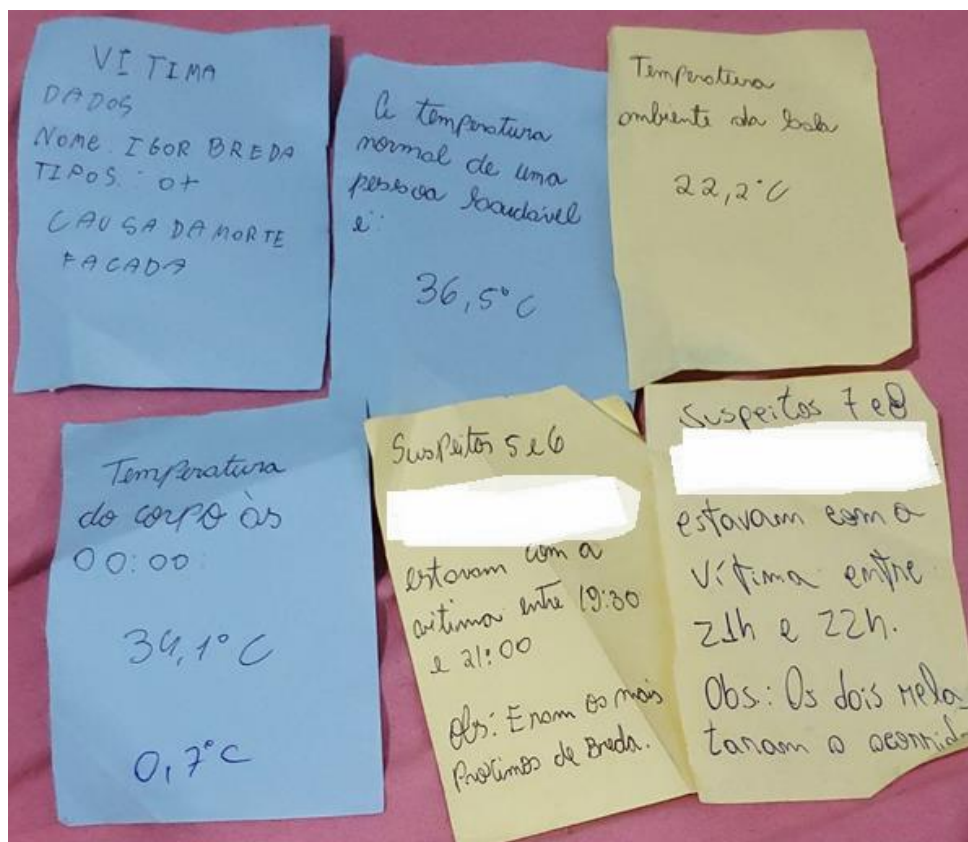
1º etapa: Devolução

Posterior a chegada de todos os participantes, demos início a primeira fase da teoria das situações didáticas, a devolução. Nesse momento, expomos situação em que nos encontrávamos com a seguinte frase no quadro: Quem matou Igor Breda? Inicialmente, narramos um pouco sobre a aplicabilidade das equações diferenciais nas diversas áreas do conhecimento, incluindo a descoberta da hora em que um ser morreu.

Em seguida, descrevemos o ambiente em que os integrantes da pesquisa se encontravam, foram descritos: a vítima, os suspeitos, as anotações que a polícia local deixou contendo algumas informações necessárias e desnecessárias para a descoberta de quem cometeu o homicídio, e por último, a fórmula de resfriamento de newton, que seria utilizada para a criação dos modelos ideais para a descoberta dos homicidas.

Os detalhes das anotações, conforme explicitados na figura 3, apresentam informações sobre: dados gerais da vítima, temperatura da sala e do corpo da vítima, e os oito suspeitos.

Figura 3 - Algumas informações das anotações



Fonte: Dados da pesquisa

Foram então formados dois grupos denominados Stark e Bolton, com quatro componentes cada. Como havia um mural de anotações em duas extremidades da sala, os dois grupos se dispersaram, cada um para um extremo distinto, e assim, demos início a segunda fase da Teoria das Situações: a ação.

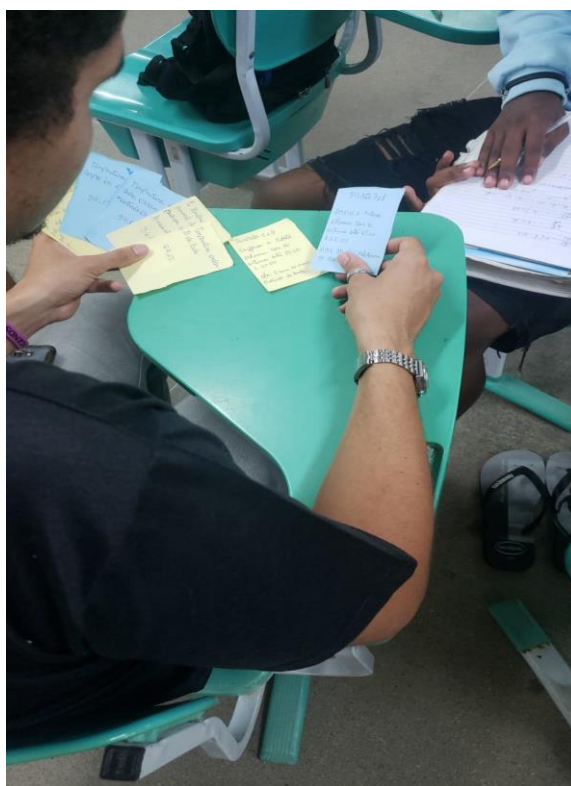
2º etapa: Ação e Formulação

Quando questionados em como deveriam fazer para encontrar os modelos adequados, foi adotado a *priori* como *milieu*, um sistema de dicas. Iriamos revelar algumas informações importantes caso apresentassem dificuldade no decorrer da

construção dos modelos. Contudo, foi necessário somente a explicitação de duas dicas, o que demonstra de certa forma a eficácia da metodologia. A primeira dica dada foi simples: Resolva a E.D.O.

Nesse momento as duas equipes trabalharam de formas distintas para a elaboração dos protótipos, enquanto a equipe Stark trabalhava em unicidade em cada uma das estratégias esquematizadas por eles, desde interpretação da situação a técnicas utilizadas para a resolução, a equipe Bolton dividiu entre si as etapas que eles julgavam importantes, se adequando de acordo com as situações, enquanto um deles era responsável pela análise das informações das anotações, o outro era responsável pelos cálculos numéricos, e ainda outro pelas manipulações algébricas.

Figura 4 - Integrante da Equipe Bolton



Fonte: Dados da pesquisa

Apesar de seguirem estratégias distintas, As equipes concluíram a construção dos modelos com uma diferença de três segundos cada. Ambas estavam competindo entre si para constatar quem encontraria os assassinos primeiro. Percebeu-se durante a etapa de ação e formulação, que os dois grupos, quando se deparavam com uma dizima periódica ou um número com diversas casas decimais, arredondavam para

uma ou duas casas decimais. Isto acabou por gerar dois modelos distintos, sendo da Equipe Stark:

$$T(t) = 12,6(0,95)^t + 22,2$$

E da equipe Bolton sendo:

$$T(t) = 12,6\left(\frac{341}{348}\right)^t + 22,2$$

3º Etapa: Validação e Institucionalização

Após a elaboração dos modelos matemáticos da nossa situação problema, os participantes foram ao quadro para a validação do seu protótipo, isto pode ser averiguado pelas figuras 5 e 6. Neste momento, eles validariam constatando o verdadeiro assassino de Igor Breda. De acordo com seu modelo, a equipe Stark revelou que os suspeitos 7 e 8 eram de fato os assassinos, enquanto isso, a equipe Bolton expos os suspeitos 5 e 6 como os homicidas.

Figura 5 - Validação do Modelo da equipe Stark

$$\begin{aligned}
 34,1 - 12e^t + 22,2 &\Rightarrow 12e^t = 34,1 - 22,2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 12e^t &= 11,9 \Rightarrow e^t = 0,99 \\
 36,5 - 12,6(0,95)^t + 22,2 &\Rightarrow 12,6(0,95)^t = 14,3 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 10,95^t &= 1,13 \Rightarrow t \cdot \ln(0,95) = \ln(1,13) \Rightarrow t = \frac{\ln(1,13)}{\ln(0,95)} \\
 t &= \ln(1,13) - 0,95 \Rightarrow t = \ln(0,18) = -1,71
 \end{aligned}$$

Fonte: Dados da pesquisa

Figura 6 - Validação do modelo da equipe Bolton

$$T(t) = 22,2 + C \cdot \left(\frac{34,1}{34,8}\right)^t$$

$$36,5 = 22,2 + 12,6 \cdot \left(\frac{34,1}{34,8}\right)^t$$

$$\frac{36,5 - 22,2}{12,6} = \left(\frac{34,1}{34,8}\right)^t$$

$$\frac{14,3}{12,6} = 0,94^t$$

$$0,94^t = 1,13$$

$$t = -2,04$$

Suspeito 5 e 6.

Fonte: Dados da pesquisa

Após os dois grupos exporem suas representações do problema, retomamos o objeto matemático, afirmando que as técnicas utilizadas por eles para resolver a equação diferencial e para a elaboração dos modelos foram corretas. Com a situação adidática de que cada um dos grupos havia encontrado um suspeito diferente, debatemos sobre o ocorrido, de forma crítica, tendo como pauta inocentes que foram e são presos por provas inconsistentes, um dos grupos, caso trabalhasse em conjunto com a polícia civil, poderia ter colocado um inocente na cadeia.

Após a discussão, apresentamos os erros providos pela aproximação de dízimas periódicas e números com muitas casas decimais, os participantes refizeram os modelos corretamente, e enfim encontram os assassinos, sendo eles os suspeitos 5 e 6. Este momento durou cerca de uma hora e quarenta minutos.

5.3 RESULTADOS DO MINICURSO: DESCUBRA SE ESTOU BLEFANDO OU NÃO.

Após o primeiro momento ter ocorrido, passamos para o segundo momento. Para este, como foi exposto na metodologia, fizemos uma simulação de leilão, e o item que colocamos a venda foi a figura 7, uma de nossas bolsas. Colocamos um preço inicial de cinco mil reais, os alunos então questionaram sobre o preço supostamente abusivo, então explicamos que o tecido da bolsa era da mesma época de Jesus Cristo e que a prova disso era que o tecido continha cerca de 92% e 93% de seu Carbono-14 original.

Figura 7 - Item do leilão



Fonte: Dados da pesquisa

1º etapa: Devolução

Após informa-los da quantidade de Carbono-14 presente no material, foi anunciado a segunda tarefa: descobrir se estávamos blefando ou não. Posteriormente, explicitamos as aplicações do decaimento radioativo sucintamente, incluindo a transformação de Carbono-14 em Carbono-12 de diversos objetos. Revelamos então o modelo pré-estabelecido de decaimento radioativo, assim como o tempo que leva para que um objeto tenha metade do carbono 14-original.

2º etapa: Ação, Formulação e Validação

Comparando a quantidade de tempo para a formulação do modelo do primeiro momento para o modelo do segundo momento, houve um decréscimo bastante interessante, sendo que neste segundo momento os participantes da pesquisa concluíram em cerca de vinte a trinta minutos. Ambas as equipes permaneceram competitivas, concluindo a tarefa com diferença de segundos. Na figura 8, é possível perceber as técnicas utilizadas por uma das equipes para a composição dos modelos.

Figura 8 - Modelo e validação de uma das equipes

Handwritten mathematical work in a notebook showing the derivation of a model $m = e^{kt}$ and its validation using two data points. The work includes the initial model, substitution of data points (0.93, 1913.25) and (0.92, 1327.16), taking natural logarithms, and solving for k to get -0.00012 . The final model is $m = e^{-0.00012t}$.

$$m = e^{kt}$$

$$0,93 = e^{(-0,00012)t}$$

$$\ln 0,93 = -0,00012t$$

$$-0,072 = -0,00012t$$

$$+604,75 = t$$

$$0,92 = e^{(-0,00012)t}$$

$$\ln 0,92 = -0,00012t$$

$$-0,083 = -0,00012t$$

$$t = -0,083 / -0,00012 = -691,84$$

$\checkmark 1913,25$	$T = -604,75$
$\checkmark 1327,16$	$T = -691,84$

Fonte: Dados da pesquisa

Ao fim, os dois grupos construíram o mesmo modelo, sendo ele:

$$\frac{m}{m_0} = e^{kt}$$

Depois disso, afirmaram que o tecido da bolsa era datado entre 1328 e 1418, havendo discordância com a informação de que o tecido da bolsa fosse da época de Jesus Cristo. Discutiu-se então sobre a época do tecido da bolsa, um dos colaboradores afirma ser da época do iluminismo, porém esta ocorrência se passa durante o século XVIII, foi averiguado em seguida que o tecido da bolsa é do século XIV, onde ocorreu a grande crise na Europa quanto a sua prosperidade.

3º etapa: Institucionalização

Para finalizar o minicurso, retomamos o conteúdo abordado, aprofundando seus conceitos e as diversas aplicações em que eles se encontravam. Os participantes então receberam a segunda avaliação diagnóstica, onde puderam responder sobre as contribuições e limitações da representação de situações utilizando modelos matemáticos e equações diferenciais.

5.4 RESULTADOS DA SEGUNDA AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA

Os oito participantes da nossa proposta responderam a nossa avaliação diagnóstica. Pôde-se perceber uma homogeneidade, todos os integrantes avaliaram de forma muito positiva. Como foram apenas oito integrantes, será possível expor cada uma de suas opiniões quanto ao processo metodológico. Quando perguntados sobre o processo de aprendizagem de equações diferenciais os participantes apresentaram os seguintes resultados.

Participante A: “Incrível, uma aplicação prática e real de uma situação, deixando mais claro sua utilidade (EDO)!”.

Participante B: “Muito interessante, pois conseguimos compreender onde o objeto matemático pode ser aplicado” .

Participante C: “Foi muito gratificante de presenciar uma excelente aplicação de EDO”.

Participante D: “Muito top e interessante ao ver a aplicação dele para coisas do cotidiano, me senti o Sherlock Holmes investigando a hora da morte de uma pessoa com E.D.O”.

Participante E: “Dinâmico, e muito aproveitador para fixação do objeto matemático”.

Participante F: “A proposta e a execução foi muito agregadora, uma vez que proporcionou a compreensão do conteúdo de forma dinâmica, além de que tornou o processo bem mais atrativo. Gostei muito de trabalhar com modelagem matemática e Equações Diferenciais Ordinárias, foi muito valoroso”.

Participante G: “O ambiente, o horário e principalmente o período da manhã contribui para que ocorresse um processo agradável e produtivo. Contudo, em relação ao aprendizado e consolidação dos conteúdos de modelagem de resolução de problemas envolvendo EDO de 1º ordem, foi significativo os desafios da realidade, com o qual pode empreender meus conhecimentos e identificar a importância deste conhecimento para a realidade do dia a dia”.

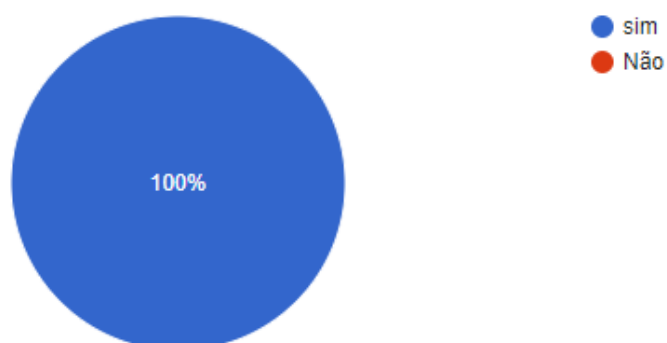
Participante H: “Muito boa”.

O gráfico 2 nos mostra a opinião dos participantes quanto a compreensão do conteúdo de equações diferenciais com variáveis separáveis, nele é possível verificar que 100% dos alunos sentiram que houve uma melhora na sua aprendizagem. Já o gráfico 3, assim como no segundo gráfico, constatou-se também que 100% dos alunos melhoraram a sua percepção crítica.

Gráfico 2 - Questão da segunda avaliação Diagnóstica

Foi possível compreender melhor o conteúdo de equações diferenciais de variáveis separáveis utilizando Modelagem Matemática?

8 respostas

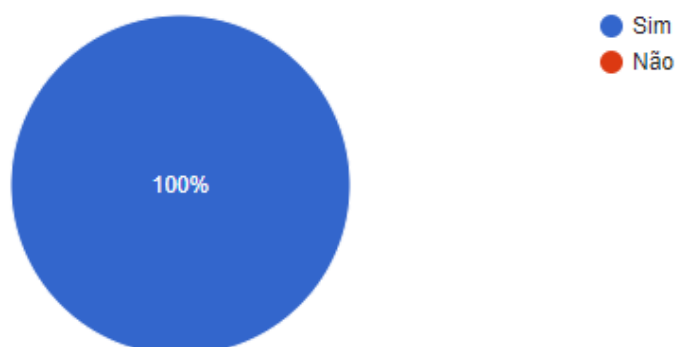


Fonte: <https://docs.google.com/>

Gráfico 3 - Questão da Avaliação Diagnóstica

Houve uma melhora quanto a sua percepção critica com as aplicações das equações diferenciais no dia a dia?

8 respostas



Fonte: <https://docs.google.com/>

Quanto as limitações do uso da Modelagem para a sala de aula, foi possível notar que o tempo é uma variável importante a ser considerada. Contudo, os participantes afirmaram não ter tido qualquer dificuldade ou limitação durante todo o minicurso.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As configurações de Modelagem Matemática combinadas com as de equações diferenciais ordinárias expandem todas as perspectivas sociais críticas, promovem a comunicação e garantem o diálogo entre as diversas áreas do conhecimento. Isto faz com que os alunos sintam proximidade do objeto matemático com o seu cotidiano, fazendo com que tenha uma aprendizagem satisfatória. O aprendizado estabelecido pela Modelagem Matemática torna-se cada vez mais eficaz e eficiente à medida que as definições de Equações Diferenciais Ordinárias são incluídas. A mediação proporcionada pelo professor engaja os alunos a discutir suas estratégias enquanto dissemina o conhecimento fornecido por equações diferenciais, que explora variáveis em modelos matemáticos a partir de perspectivas diferentes, usando as informações contidas na mídia individual ou coletivamente.

As Equações Diferenciais Ordinárias potencializam as perspectivas sócio críticas propiciadas pela Modelagem Matemática aproximando cada vez mais a Educação Matemática escolar do contexto social no qual os estudantes estão inseridos, promovendo um estreitamento na relação entre o conhecimento propiciado em sala de aula com os recursos e as necessidades do nosso tempo. É dada ao estudante, que diante do processo de Modelagem Matemática tenha uma postura de pesquisador, autonomia para buscar o saber e este conseqüentemente aumenta o nível de consciência e passa a assumir uma postura sócio crítica.

REFERÊNCIAS

- AUSUBEL, D. P. (1988). **Educational psychology: a cognitive view**. Nova York, Holt Rinehart and Winston.
- ALMEIDA, L.M.W.; BORSOI, A.H. **Modelagem matemática e a aprendizagem significativa: uma proposta para o estudo de equações diferenciais ordinárias**. *Educação Matemática Pesquisa*, 2004.
- BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: O que é? Por quê? Como?** Veritati, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. São Paulo, 2002.
- BIEMBENGUT, Maria Salete; HEIN, Nelson. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2005.
- BORSSOI, Adriana Helena . **A aprendizagem significativa em atividades de modelagem matemática como estratégia de ensino**, Revista EDUCAÇÃO MATEMÁTICA PESQUISA, 2004.
- D'AMBROSIO, U. (2002). **A Matemática nas escolas**. *Educação Matemática em Revista*, ano 9, n. 11, pp. 29-33.
- D'AMBROSIO, U. **Da realidade à ação: reflexões sobre educação e matemática**. 4.ed. São Paulo: Summus, 1986.
- GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.
- GODOY, E.V. **Currículo, cultura e educação matemática: uma aproximação possível?** Tese (Doutorado - Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de Concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, 2011.
- GOMES, R. **Análise e interpretação de dados de pesquisa qualitativa**. In: MINAYO, Maria C. S. (Org.). **Pesquisa Social – teoria, método e criatividade**. Petrópolis: Vozes, 2009, p. 79-108.
- HOUSE, S; PEGGY, A. **Álgebra: idéias e questões**. IN: COXFORD, Arthur; SHULTE, Albert (orgs.). **As idéias da Álgebra**. São Paulo, Atual, 1995. pág.1-8.
- MIGUEL, I.C. **UMA PROPOSTA DE MODELAGEM MATEMÁTICA APLICADA À PRODUÇÃO DA FARINHA DE TRIGO**. Paraná, 2009.
- SILVEIRA, J.C.; RIBAS, J.L.D. **Discussões sobre modelagem matemática e o ensino-aprendizagem**, 2004. Disponível em: <http://www.somatematica.com.br/artigos/a8/p2.php> (acesso em 07/12/2021)

TAVARES, F. **Os modelos matemáticos e o processo de modelação matemática**, Millenium, Revista do Instituto Superior Politécnico de Viseu, v.3,n.2, p.30-45, jun.1996.